



TITLE:

Von Neumann AlgebraのAlgebraic Generation (無限次元空間のテンソル積)

AUTHOR(S):

齋藤, 偵四郎

CITATION:

齋藤, 偵四郎. Von Neumann AlgebraのAlgebraic Generation (無限次元空間のテンソル積). 数理解析研究所講究録 1975, 228: 88-100

ISSUE DATE:

1975-03

URL:

<http://hdl.handle.net/2433/105402>

RIGHT:

Von Neumann algebra の algebraic generation

東北大 教養 齋藤 偵四郎

§ 1. 序論. Von Neumann algebra の generation の問題として研究対象になったものとして次の二つがある.

問題 1. separable Hilbert space 上の von Neumann algebra は single generator をもつか. もし肯定的ならば, どんな種類の operator が single generator たり得るか.

問題 2. von Neumann algebra がその projections 全体 (あるいはその他の class の operators) で代数的に生成されるのはどんな場合か.

ここで, von Neumann algebra A が subset $S \subset A$ で代数的に生成されるとは, 任意の operator $A \in A$ が S 中の operators の algebraic combination として表わされることである.

問題 1 において A は von Neumann algebra A が hyperfinite II_1 , properly infinite の場合には $A \otimes B(H)$ ($B(H)$ は Hilbert

space H 上の bounded operators 全体の作る von Neumann algebra) と同型であることが有効に働き, 簡単な operator matrix の計算に帰着できて議論が進められた [4].

ここではこのテクニックを問題 2 に適用して, 文献 [2], [3] で得られた結果を統一的に証明する.

はじめに von Neumann algebras のテンソル積に関する基本的な事実をまとめておく. H_1, H_2 を Hilbert spaces, そのテンソル積を $H_1 \otimes H_2$ とする. $\{e_\alpha\}_{\alpha \in I}$ を H_2 の orthonormal basis とすると

$$U_\alpha: H_1 \rightarrow H^\alpha \equiv H_1 \otimes e_\alpha, \quad x \in H_1 \mapsto x \otimes e_\alpha \in H^\alpha$$

は isometric map である. $H^\alpha = H_1$ と identify すると

$$H_1 \otimes H_2 = \sum_{\alpha \in I} \oplus H^\alpha, \quad H^\alpha = H_1, \text{ for all } \alpha \in I$$

である. $T \in B(H_1 \otimes H_2)$ は次のような matrix 表現が得られる:

; $U_\alpha^*: H_1 \otimes H_2 \rightarrow H_1$ は H^α を H_1 上へ isometric に写し

, $H_1 \otimes H_2 \ominus H^\alpha \in \{0\}$ に写す. $T_{\alpha\beta} = U_\alpha^* T U_\beta$ とおけば,

$$T = (T_{\alpha\beta}), \quad T_{\alpha\beta} \in B(H_1).$$

特に $\mathcal{A} \in H_1$ 上の von Neumann algebra とすると,

$$\mathcal{A} \otimes B(H_2) = \{T \in (T_{\alpha\beta}); T_{\alpha\beta} \in \mathcal{A}\}$$

である.

いま, $\mathcal{A} \in$ Hilbert space H 上の von Neumann algebra とし, $\{E_\alpha\}_{\alpha \in I} \in \mathcal{A}$ の equivalent orthogonal projections の

family $\{E_\alpha\}_{\alpha \in I}$ $\sum_{\alpha \in I} E_\alpha = I$ とする. $E_\alpha \sim E_\beta$ であるとき A の partial isometry $V_{\alpha\beta}$ とする: $V_{\alpha\beta}^* V_{\alpha\beta} = E_\alpha$, $V_{\alpha\beta} V_{\alpha\beta}^* = E_\beta$.
 $\alpha_0 \in I$ を一つ固定して $V_{\alpha_0\alpha}$ を定め $H_1 \equiv E_{\alpha_0} H$ かつ $H^\alpha \equiv E_\alpha H$ と H との isomorphism U_α とする. H^α と H_1 を identify して,

$$H = H_1 \oplus H_2, \quad H_2 = L^2_{\mathbb{C}}(I)$$

を得る. この時, $T \in A$ の matrix 表現は

$$T = (T_{\alpha\beta}), \quad T_{\alpha\beta} = (V_{\alpha_0\alpha}^* T V_{\alpha_0\beta}) E_{\alpha_0} \in A_{E_{\alpha_0}},$$

$T' \in A'$ の matrix 表現は

$$T' = (T'_{\alpha\beta}), \quad T'_{\alpha\beta} = (V_{\alpha_0\alpha}^* T' V_{\alpha_0\beta}) E_{\alpha_0} = \delta_{\alpha\beta} T' E_{\alpha_0} \in A'_{E_{\alpha_0}}$$

となり, $A = A_{E_{\alpha_0}} \otimes B(H_2)$ である. 特に A は continuous あるいは properly infinite である,

$$\exists E, F \in A: E \perp F, E \sim F, E + F = I$$

であるから

$$A = A_E \otimes B(H_2) \equiv M_2(A_E), \quad \dim H_2 = 2$$

である. また A の operator は entries が A_E の operators の 2×2 matrix として表現される.

A が n -homogeneous とは n 個の equivalent orthogonal abelian projections の和が I のものが選べるときである. 従ってこの時

$$A = B \otimes B(H_n), \quad B \text{ abelian}, \quad \dim H_n = n$$

とある. type I の von Neumann algebra は homogeneous von Neumann algebras の direct sum である.

§2. 補題. §1 で述べた目的の結果を証明するのに必要ないくつかの補題を準備する.

補題 1. 任意の von Neumann algebra \mathcal{A} に対して, $M_2(\mathcal{A})$ ($= \mathcal{A} \otimes B(H_2)$, $\dim H_2 = 2$) はその projections 全体で代数的に生成される.

証明. $M_2(\mathcal{A})$ の任意の operator $\begin{bmatrix} A & B \\ C & D \end{bmatrix}$ を取る.

$$\begin{bmatrix} A & B \\ C & D \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & A \\ 0 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 0 & I \\ 0 & 0 \end{bmatrix}^* + \begin{bmatrix} 0 & B \\ 0 & 0 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 0 & C^* \\ 0 & 0 \end{bmatrix}^* + \begin{bmatrix} 0 & D^* \\ 0 & 0 \end{bmatrix}^* \begin{bmatrix} 0 & I \\ 0 & 0 \end{bmatrix}$$

であるから, $\begin{bmatrix} 0 & X \\ 0 & 0 \end{bmatrix}$ ($X \in \mathcal{A}$) の形の operator を考えればよい.

1. 任意の $X \in \mathcal{A}$ は \mathcal{A} の unitary operators の一次結合であるから, $X = U$, unitary として十分である. この時,

$$E = \frac{1}{2} \begin{bmatrix} I & U \\ U^* & I \end{bmatrix}, \quad F = \frac{1}{2} \begin{bmatrix} I & -iU \\ iU^* & I \end{bmatrix}$$

と定義すれば, $E, F \in M_2(\mathcal{A})$ は projections である.

$$\begin{bmatrix} 0 & U \\ 0 & 0 \end{bmatrix} = \frac{1}{2} (2E - I) + \frac{i}{2} (2F - I)$$

であるから結論が得られる.

補題 2. 任意の von Neumann algebra \mathcal{A} に対して $M_2(\mathcal{A})$ は index 2 の nilpotent (i.e. square が zero) partial isometries 全体で代数的に生成される.

証明. 補題 1 の証明から分る様に, $\begin{bmatrix} 0 & U \\ 0 & 0 \end{bmatrix}$ ($U \in \mathcal{A}$ は unitary) の形の $M_2(\mathcal{A})$ の element のみを考えて十分である. 所で,

$$\begin{bmatrix} 0 & U \\ 0 & 0 \end{bmatrix}^2 = \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}, \quad \begin{bmatrix} 0 & U \\ 0 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 0 & U \\ 0 & 0 \end{bmatrix}^* = \begin{bmatrix} UU^* & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} I & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}$$

であるから $\begin{bmatrix} 0 & U \\ 0 & 0 \end{bmatrix}$ 自身が index 2 の nilpotent partial isometry である. 故に $M_2(\mathcal{A})$ の全ての elements は index 2 の nilpotent partial isometries 全体で代数的に生成される.

type I の von Neumann algebra の case を処理するため
に次の補題を準備する.

補題 3. \mathcal{A} は n -homogeneous ($n < \infty$) von Neumann algebra, $S \in \mathcal{A}$ は任意の self-adjoint operator とする. この時次の性質を持つ equivalent orthogonal projections $\{E_1, E_2, \dots, E_n\}$ が選べる.

$$\sum_{i=1}^n E_i = I; \quad E_i S = S E_i \quad (i=1, 2, \dots, n)$$

証明. \mathcal{A} は n -homogeneous であるから, \mathcal{A} は equivalent orthogonal abelian projections $\{E_1, E_2, \dots, E_n\}$ が存

在して,

$$\sum_{i=1}^n P_i = I, \quad A = B \otimes B(H_n), \quad \dim H_n = n, \quad B \text{ abelian}$$

となる. Gelfand 表現により, B はその maximal ideal space X 上の連続関数と考えてよい: $B = C(X)$. 故に A は $C(X)$ の elements を entries とする $n \times n$ 行列全体の algebra と考えてよい: $A = M_n(C(X))$. 従って次の Deckard-Pearcy [1] の結果が適用できる.

DECKARD-PEARCY の補題. 任意の self-adjoint element $A \in M_n(C(X))$ に対して unitary element $U \in M_n(C(X))$ が存在して, 次の性質を持つ.

$$\forall t \in X: (U^*AU)(t) \text{ は diagonal.}$$

この Deckard-Pearcy の結果を吾々の case に適用すると

$\exists U \in A$ unitary, $\forall t \in X: (U^*SU)(t)$ は diagonal
を得る. 故に

$$(U^*SU)P_i = P_i(U^*SU) \quad (i=1, 2, \dots, n)$$

となる. 従って $E_i = UP_iU^*$ ($i=1, 2, \dots, n$) とおけば, $\{E_1, E_2, \dots, E_n\}$ が求める性質を持つ.

補題 4. von Neumann algebra A が abelian であるための必要十分条件は, $T^2=0$ なる $T \in A$ は $T=0$ 以外に存在しないことである.

証明. (\Leftarrow) A が non-abelian であれば, non-zero ortho-

gonal equivalent projections $E, F \in \mathcal{A}$ が存在する.

$$T^*T = E, \quad TT^* = F, \quad T \in \mathcal{A}$$

とすると, $TE = FT = T \neq 0$ であり,

$$T^2 = (TE)(FT) = TEFT = 0.$$

(\Rightarrow) 次の事実が示明されている.

" \mathcal{A} は任意の von Neumann algebra とし, $A \in \mathcal{A}, B \in \mathcal{A}', AB = 0$ とするば central projection $E \in \mathcal{A} \cap \mathcal{A}'$ が存在して, $EA = 0, EB = B$ をみたす." (実際, すべての $T \in \mathcal{A}$ に対して $ATx = 0$ とする x 全体の subspace を \mathcal{M} とすると $\mathcal{M} \perp \mathcal{M}$ の projection E がおめる性質を持つ)

これを $T = A \in \mathcal{A}, T = B \in \mathcal{A}'$ に適用すれば $ET = TE = 0$ とする projection $E \in \mathcal{A} \cap \mathcal{A}' = \mathcal{A}$ が存在することになる.

§3. 定理. §2 の補題を用いて目的の定理を証明する.

定理1. von Neumann algebra \mathcal{A} がその projections 全体で代数的に生成されるための必要十分条件は, \mathcal{A} が infinite dimensional abelian summand を含まないことである.

証明. 最初 \mathcal{A} がその projections 全体で代数的に生成されると仮定する. この時 \mathcal{A} のすべての summand はまたその中の projections 全体で代数的に生成されることを注意しておく. いま, \mathcal{A} が infinite dimensional abelian summand \mathcal{B}

を含むと仮定する. Gelfand 表現で, \mathcal{B} はある compact Hausdorff space 上の連続関数全体 $C(X)$ とみなしてよい. この時の projection は $C(X)$ の中の特性関数に外ならない. 従って \mathcal{B} の projections 全体で代数的に生成される algebra \mathcal{B}_0 は $C(X)$ の中の finite-valued な関数全体からなる. 他方で \mathcal{B} は infinite dimensional であるから, X は infinite 従って $C(X)$ は infinitely many valued な関数を含み, \mathcal{B} はその中の projections で代数的には生成され得ない. これははじめに注意した事に反する. すなわち, \mathcal{A} は infinite dimensional abelian summand を含み得ない.

次に \mathcal{A} が infinite dimensional abelian summand を含まないと仮定する.

$\mathcal{A} = \mathcal{A}_1 \oplus \mathcal{A}_2$; \mathcal{A}_1 type I, \mathcal{A}_2 continuous と直和分解しておく. §1 で述べた様に \mathcal{A}_2 はある von Neumann algebra \mathcal{B} 上の 2×2 matrix 全体 $M_2(\mathcal{B})$ であるから, 補題 1 から \mathcal{A}_2 はその projections 全体で代数的に生成される. 故に \mathcal{A} は type I と仮定してよい. この時

$$\mathcal{A} = \sum_n \mathcal{B}_n; \quad \mathcal{B}_n \text{ } n\text{-homogeneous}$$

と分解しておく. finite dimensional abelian summand はその projections の linear span であるから, \mathcal{A} は最初から abelian summand を含まないとしよ. さらに, \mathcal{A}

1 n 是 infinite cardinal であれば \mathcal{B}_n の中に cardinality n の equivalent orthogonal projections と 1 是 $I_n \in \mathcal{B}_n$, identity の 1 是 の 1 是 と 1 是 の 1 是 の family \mathcal{E} 2 つの cardinality n の disjoint family に 1 是 1 是 1 是 の projections の 1 是 1 是 1 是

$$\exists E_n, F_n \in \mathcal{B}_n : E_n \perp F_n, E_n \sim F_n, E_n + F_n = I_n.$$

そこで $\mathcal{A}_0 = \sum \oplus \{ \mathcal{B}_n : n \text{ infinite} \}$ 1 是 1 是 $E = \sum E_n$, $F = \sum F_n$ と 1 是 1 是 $\mathcal{A}_0 = (E \mathcal{A}_0 E) \oplus \mathcal{B}(H_2)$, $\dim H_2 = 2$ と 1 是 1 是 補題 1 が適用できる。結局

$$\mathcal{A} = \sum \oplus_{n=2}^{\infty} \mathcal{B}_n : n \text{ finite}$$

と仮定 1 是 1 是。

この時, $\mathcal{B} = \sum \oplus \{ \mathcal{B}_n : n \text{ even} \}$, $\mathcal{C} = \sum \oplus \{ \mathcal{B}_n : n \text{ odd} \}$ とする。 n 是 even の時は, 1 是 I_n の equivalent orthogonal abelian projections $P_1, P_2, \dots, P_n \in \mathcal{B}_n$ が存在する。 1 是, $E_n = P_1 + \dots + P_{n/2}$, $F_n = P_{n/2+1} + \dots + P_n$ とすると, $E_n \sim F_n$, $E_n \perp F_n$, $E_n + F_n = I_n$ と 1 是。 even n 1 是 1 是 $E = \sum E_n$, $F = \sum F_n$ と 1 是 1 是。

$$E \perp F, E \sim F, E + F = I (\text{in } \mathcal{B})$$

従って $\mathcal{B} = (E \mathcal{B} E) \oplus \mathcal{B}(H_2)$, $\dim H_2 = 2$ と 1 是 1 是 再び 補題 1 が 1 是 1 是 projections 全体で代数的に生成される。

最後に \mathcal{C} が 1 是 projections 全体で代数的に生成されること

を示す. $A \in \mathcal{C}$ は任意の self-adjoint operator とする. A が \mathcal{C} の projections の algebraic combination であることを示せば十分である.

$$A = \sum \oplus A_n \in \mathcal{C}, \quad A_n \in \mathcal{B}_n, \quad A_n^* = A_n, \quad (n \text{ odd})$$

とする. 各 \mathcal{B}_n (n odd) について補題 3 を用いると

$$E_k A_n = A_n E_k \quad (k=1, 2, \dots, n), \quad \sum_{k=1}^n E_k = I_n \quad (\text{in } \mathcal{B}_n)$$

と equivalent orthogonal projections $\{E_1, E_2, \dots, E_n\}$ (in \mathcal{B}_n) が存在する. $n = 2m+1$ に対して

$$P_n = E_1 + \dots + E_m, \quad Q_n = E_{m+1} + \dots + E_{2m}, \quad R_n = E_{2m+1}$$

と置き, 各 odd n について

$$P = \sum P_n, \quad Q = \sum Q_n, \quad R = \sum R_n \quad (n \text{ odd})$$

と作れば, $P, Q, R \in \mathcal{C}$, $A = AP + AQ + AR$ である.

P, Q は $(P+Q) \mathcal{C} (P+Q)$ における orthogonal, equivalent である.

$$AP, AQ \in (P+Q) \mathcal{C} (P+Q)$$

である. 更に, $(P+Q) \mathcal{C} (P+Q) = (P \mathcal{C} P) \oplus \mathcal{B}(H_2)$, $\dim H_2 = 2$ であるから補題 1 を用いて, AP, AQ は \mathcal{C} の projections の algebraic combinations である. 結局 AR の処理だけが残る.

$$P'_n = E_1, \quad R'_n = E_2 + \dots + E_m + E_{2m+1}$$

と置けば $A = AP' + AQ + AR'$ である.

$$Q \perp R', \quad Q \sim R' \quad \text{in} \quad (Q+R') \in (Q+R'),$$

$$AR = (Q+R') AR (Q+R') \in (Q+R') \in (Q+R').$$

故に AR については補題 1 が適用できる。

上の reduction は有限回の step で完了するから十分性が得られる。

定理 1 の証明に於ける reduction の各段階で補題 1 の代りに補題 2 を用いれば次の定理が得られる。

定理 2. von Neumann algebra A が index 2 の nilpotent partial isometries 全体で代数的に生成される必要十分条件は A が abelian summand を含むことである。

証明. A が abelian summand を含めばその summand は $T^2=0$ なる non-zero operator を含み得る (補題 4)。従って勿論, A は index 2 の nilpotent partial isometries で代数的に生成し得る。

A が abelian summand を含まなければ定理 1 の十分性の証明と全く同じ reduction が可能で, 補題 2 が直接適用できない場合として残るのは

$$A = \sum_{n=2}^{\infty} \{ \mathcal{M}_n : n < \infty, \text{ odd} \}$$

である。これについては定理 1 の証明の最後の段階で補題 1 を補題 2 で置き代えればよいことは殆んど明らかである。

定理 1, 2 の系として次を得る。

系. von Neumann algebra \mathcal{A} is abelian summand
を含まないとする. $p(\lambda) \in$ 次数が ≥ 2 の多項式とするとき,
 \mathcal{A} は

$$\mathcal{L} = \{I, T \in \mathcal{A} : p(T) = 0\}$$

2-代数的に生成される.

証明. $\mathcal{Q}_0 \in \mathcal{L}$ 2-代数的に生成された \mathcal{A} の subalgebra
とする.

$$p(\lambda) = q(\lambda)r(\lambda), \quad q(\lambda) = \lambda^2 + \alpha\lambda + \beta$$

と表す.

(i) $\alpha^2 - 4\beta = 0$ の時: $T \in \mathcal{A} \ni T^2 = 0$ なる任意の operator
とする. $A = T - \frac{1}{2}\alpha I$ とおけば $q(A) = 0$.

$$\therefore p(A) = q(A)r(A) = 0, \quad A \in \mathcal{L}$$

故に定理 2 から $\mathcal{Q}_0 = \mathcal{A}$ である.

(ii) $\alpha^2 - 4\beta \neq 0$ の時: $E \in \mathcal{A} \ni$ 任意の projection とす
る. $A = (\alpha^2 - 4\beta)^{-1/2}E - \frac{1}{2}\{\alpha + (\alpha^2 - 4\beta)^{1/2}\}I$ とおけば,

$$q(A) = 0, \quad \therefore p(A) = 0$$

従って定理 1 から $\mathcal{Q}_0 = \mathcal{A}$ である.

参 考 文 献

- [1] D. Deckard and C. Pearcy, On matrices over the ring of continuous
complex valued functions on a Stonean space, Proc. Amer. Math.
Soc. 14(1963), 322 - 328.
- [2] R. Douglas and D. Topping, Operators whose squares are zero, Rev.
Roumaine Math. pure et appl. 12(1967), 645 - 652.
- [3] P. Fillmore and D. Topping, Operator algebras generated by projections,
Duke Math. J. 34(1967), 333 - 336.
- [4] T. Saito, Von Neumann algebras \otimes generators, 第10回実関数論,
第9回関数解析合同ミナモトシユーム講演集録.(1971),
49 - 61